

*Н. П. Ординарцева*

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА НА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК МЕТРОЛОГИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫЙ ИНСТРУМЕНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗМЕРЕНИЙ

*N. P. Ordinartseva*

### DESIGN OF EXPERIMENTS IN A TRACEABLE INTERVAL VARIABLES AS A REASONABLE TOOL FOR SOLVING TASKS OF MEASUREMENT

**А н н о т а ц и я.** *Актуальность и цели.* Обосновывается необходимость дальнейшего развития классической теории планирования эксперимента на интервальных переменных, что позволяет иметь корректный математический инструмент решения задач измерений и метрологии. *Материалы и методы.* Планирование эксперимента на интервальных данных гарантированного нахождения результата измерений с использованием таких важных свойств интервала, как монотонность по включению, двусторонняя аппроксимация, сужение интервальной функции наиболее адаптировано для решения задач измерений и метрологии. Способ основан на построении интерполяционной функции внутри интервала ее гарантированного нахождения; значения функции в узлах интерполяции совпадают с робастными, эффективными и состоятельными оценками полученных результатов измерений, а в точках, удаленных от узлов, посредством сжимающего оператора внутренней аппроксимации стремятся к значениям, полученным МНК внутри гарантированного интервала. *Результаты.* Развитие GUM-подхода построением регрессионной кривой на интервальных переменных. *Выводы.* Переход на интервальные переменные позволяет преодолеть некоторые недостатки, указанные в самом GUM.

**A b s t r a c t.** *Background.* The necessity of further development of the classical theory design of experience on interval variables is substantiated, which allows to have a correct mathematical tool for solving measurement and metrology problems. *Materials and methods.* Design of experiments on the interval data of the guaranteed finding of the measurement result using such important properties of the interval as the inclusion monotony, two-sided approximation, narrowing of the interval function is most adapted for solving the problems of measurement and metrology. The method is based on the construction of an interpolation function within the interval of its guaranteed finding; the values of the function in the interpolation nodes coincide with robust, efficient and consistent estimates of the obtained measurement results, and at points far from the nodes, by means of a compressive internal approximation operator, they tend to the values obtained by the least squares method (LSM) within the guaranteed interval. *Conclusions.* The development of the GUM approach, the construction of regression curve on the interval variables. The transition to interval variables allows to overcome some of the shortcomings identified in the GUM.

**К л ю ч е в ы е   с л о в а:** планирование эксперимента, интервальные переменные, гарантированный интервал нахождения результата, оператор внутренней аппроксимации.

**К e y   w o r d s:** design of experiments, interval variables, interval guaranteed of finding the result, the internal approximation operator.

Математическая теория планирования эксперимента возникла из понимания того, что принципиально невозможно создать точно учитываемые условия для проведения эксперимента [1, с. 6]. Привлекательность применения теории планирования эксперимента в том, что она позволяет повысить эффективность экспериментальных исследований от двух до десяти раз: и чем сложнее исследования, тем эффективнее применение методов планирования эксперимента. Определяющее значение в любом экспериментальном познании принадлежит измерениям – и в этом их гносеологическая роль. Однако при развитии и внедрении методов планирования эксперимента в различных сферах научных исследований (химии, металлургии, биологии, технологии металлов) они находят *«лишь незначительное»* [2, с. 137] применение в решении задач измерений и метрологии.

Последнее объясняется прежде всего тем, что в измерительной практике используются специфические подходы, и формализация действий приемлема не всегда. В литературе по планированию эксперимента задачи метрологии рассмотрены лишь с точки зрения массовых технических измерений. Трудности при разработке методов планирования измерений связаны с тем, что необходимо не только корректно применять математические методы, но и учитывать неформализуемые метрологические требования [3, с. 23]. Последние следует разрабатывать в тесной связке с работами по исследованию метрологических моделей и теории измерений. Дополнительно следует отметить, что при использовании методов планирования эксперимента в отличных от метрологии областях деятельности в большинстве случаев не принимают в расчет метрологические характеристики применяемых в эксперименте средств измерений и пренебрегают погрешностью (неопределенностью) получаемых результатов. Использование планов эксперимента на точечных переменных дает вырожденные решения задач измерений, отличающиеся неустойчивостью при незначительных возмущениях в условиях эксперимента.

### *Потребность перехода на интервальные переменные*

Планы экспериментов на интервальных переменных, являющиеся дальнейшим развитием классической теории планирования эксперимента, позволяют избежать указанных недостатков точечного планирования. Они могут быть рекомендованы как метрологически обоснованный математический инструмент решения задач измерений и метрологии, позволяющий учесть погрешность (неопределенность) результатов измерений, порождаемую неидеальностью средств и методов измерений.

Учет погрешности/неопределенности результатов измерений приводит к необходимости обобщения понятия вещественного числа, а именно, к понятию интервального числа и использования интервальных методов исследования, в основе которых лежит идея двусторонней аппроксимации интервала гарантированного нахождения результата измерений. Интервальная математика обладает такими полезными свойствами [4, с. 8–13] в решениях задач, о данных которых известно лишь то, что они лежат в определенных интервалах, как:

- свойством монотонности по включению;
- сужением интервальной функции;
- интервальным расширением функции;
- интервальным расширением с условием наибольшей суженности.

Планирование эксперимента на интервальных данных гарантированного нахождения результата измерений с использованием таких важных свойств интервала, как монотонность по включению, двусторонняя аппроксимация, сужение интервальной функции наиболее адаптировано для решения задач измерений и метрологии. Планы на интервальных переменных отличаются от известных планов на числовых (точечных) переменных большей робастностью и адаптированностью получаемых результатов [1, с. 126–140]; точечные планы являются вырожденными и представляют частный случай интервальных планов.

Огромное разнообразие планов экспериментов, изначально унаследовавших специфику решаемой прикладной задачи, требует разработки их классификации, выполненной автором в работе [5]; в разработанной классификации показано место калибровочного эксперимента.

Наибольшее применение в решениях задач измерений и метрологии находят регрессионный и ортогональный эксперименты.

### Регрессионные эксперименты на интервальных переменных

Планирование регрессионного эксперимента на интервалах гарантированного нахождения результатов измерений гармонизировано с международным GUM-подходом оценки неопределенности измерений, определением интервала гарантированного нахождения результата измерения, но в отличие от традиционного планирования на числах, как отмечается в недостатках и причинах пересмотра «Руководства по выражению неопределенности измерения», позволяет иметь математически корректный аппарат. В интервале гарантированного нахождения результата измерения находится бесконечное число точек – это делает обоснованным применение метода наименьших квадратов (МНК), в основе которого лежит идея нормального распределения с бесконечным числом элементов в выборке. Например, нахождение калибровочной кривой средства измерений (СИ) внутри интервала ее гарантированного нахождения посредством сжимающего оператора внутренней аппроксимации интервала позволяет игнорировать нелинейную операцию удаления резко выделяющихся данных, которая при традиционном подходе в числовых шкалах (удаление грубых ошибок или промахов) приводит к нелинейным оценкам.

Нечисловые (именованные) шкалы позволяют игнорировать пропуски в данных при переходе от задачи с пропусками в числовых шкалах к задаче с игнорируемыми пропусками в нечисловых шкалах.

Рисунок 1 иллюстрирует получение калибровочной кривой СИ планированием регрессионного эксперимента на интервальных переменных и применением сжимающего оператора внутренней аппроксимации интервала.

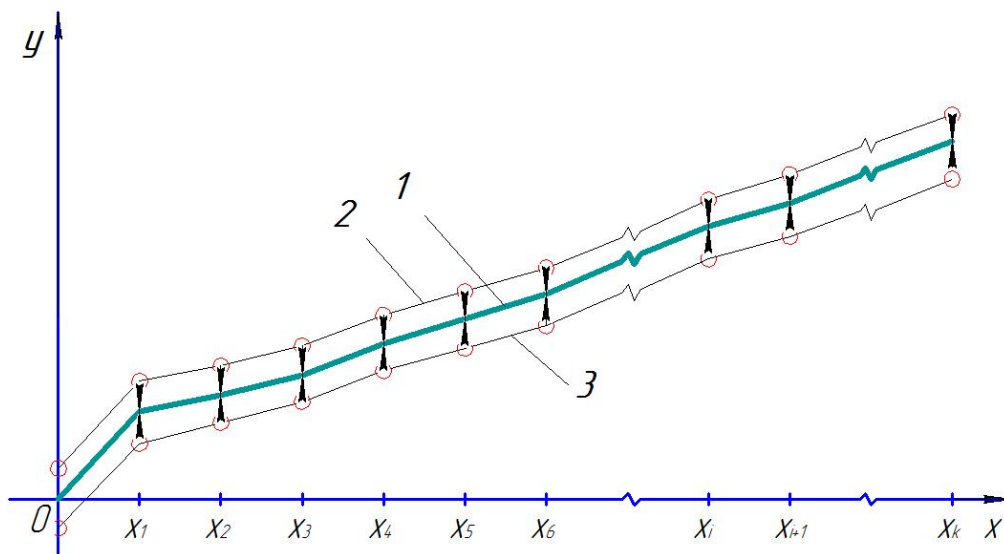


Рис. 1. Определение калибровочной кривой СИ сжимающим оператором внутренней аппроксимации интервала ее гарантированного нахождения:  
1 – искомая калибровочная кривая СИ; 2, 3 – соответственно верхняя и нижняя границы интервала гарантированного нахождения калибровочной кривой

Сжимающий оператор внутренней аппроксимации имеет вид [6–8]

$$\left[ f(X_1^+, X_2^+, \dots, X_i^+, \dots, X_n^+) - \phi(X_1^-, X_2^-, \dots, X_i^-, \dots, X_k^-) \right]^2 \Rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $X_i^+, X_i^-$  – соответственно верхняя и нижняя границы гарантированного интервала нахождения (расширенный интервал охвата / доверительный интервал). Способ основан на построении интерполяционной функции внутри интервала ее гарантированного нахождения; значения функции в узлах интерполяции совпадают с робастными, эффективными и состоятельными оценками полученных результатов измерений, а в точках, удаленных от узлов, посредством сжимающего оператора внутренней аппроксимации стремятся к значениям, полученным методом наименьших квадратов (МНК) внутри гарантированного интервала.

Так, для обладающей рядом преимуществ линейной зависимости искомой калибровочной кривой  $F(c_0, c_1) = c_0 + c_1 x$  условие (1) сжимающего оператора внутренней аппроксимации интервала гарантированного нахождения калибровочной характеристики примет вид

$$F(c_0, c_1) = \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i^+ - (c_0 + c_1 X_i)]^2 + \sum_{i=1}^n [Y_i^- - (c_0 + c_1 X_i)]^2 \right\} \Rightarrow \min. \quad (2)$$

Значения коэффициентов  $c_0, c_1$  определяются из условия

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial c_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Решая (3), имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [Y_i^+ - (c_0 + c_1 X_i)] + \sum_{i=1}^n [Y_i^- - (c_0 + c_1 X_i)] = 0 \\ \sum_{i=1}^n [Y_i^+ - (c_0 + c_1 X_i)] X_i + \sum_{i=1}^n [Y_i^- - (c_0 + c_1 X_i)] X_i = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} 2c_0 n + 2c_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i^+ + \sum_{i=1}^n Y_i^- \\ 2c_0 \sum_{i=1}^n X_i + 2c_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^+ X_i + \sum_{i=1}^n Y_i^- X_i, \end{cases}$$

откуда

$$c_0 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n Y_i^+ + \sum_{i=1}^n Y_i^- \right) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n Y_i^+ X_i + \sum_{i=1}^n Y_i^- X_i \right) \sum_{i=1}^n X_i}{2n \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2}, \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{n \left( \sum_{i=1}^n Y_i^+ X_i + \sum_{i=1}^n Y_i^- X_i \right) - \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{i=1}^n Y_i^+ + \sum_{i=1}^n Y_i^- \right)}{2n \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2}.$$

#### **Развитие GUM-подхода построением регрессионной кривой на интервальных переменных**

«Руководство по выражению неопределенности в измерениях» (GUM) [9] является одним из главных документов в метрологии. Его неоспоримая заслуга – установление всемирного единства в оценивании неопределенности измерений. GUM предоставляет концептуальный подход, позволяющий выполнять совместную обработку вкладов неопределенности, возникающих как из-за случайных, так и из-за систематических влияний, и оценивать неопределенность измерения однозначным и принятым на международном уровне способом объединения всех видов вкладов неопределенности.

Несмотря на достоинства GUM, остающегося более 20 лет основополагающим документом по метрологии, GUM не лишен недостатков, некоторые из которых являются значительными [10]. Эти недостатки никогда не скрывались, о них говорится и в самом GUM. Так, представленный в GUM подход оценивания неопределенности измерений основан на разложении модельного уравнения в ряд Тейлора первого порядка и позволяет получать достоверные результаты как в отношении оценок измеряемых величин, так и неопределенности изме-

рений только в случае линейности модели измерения. Частично корректировать нелинейность модели позволяет учет членов более высокого порядка при разложении модельной функции в ряд Тейлора. Но в этом случае необходимо выполнение следующих условий:

- раскладываемая функция должна иметь непрерывную производную по входным величинам  $x_i$  в окрестностях наилучших оценок  $\bar{x}_j$ ;
- величины, входящие в члены разложения функции калибровочной кривой в ряд Тейлора высших порядков, должны быть независимыми;
- величины  $x_j$  должны иметь нормальный закон распределения вероятностей;
- члены высших порядков, не включенные в аппроксимацию функции калибровочной кривой СИ, должны быть пренебрежимо малыми.

В своей монографии [1, с. 54–58, 119–123] автор привел критические замечания гипотезы нормальности в измерениях. Предположение о нормальности погрешности средств измерений является слишком жестким, а встречающиеся в метрологии распределения достаточно разнообразны. В качестве аргумента можно привести результаты исследований П. В. Новицкого и его школы [1, с. 55]. Гистограммы распределения температуры, влажности и атмосферного давления по результатам пятилетних метеорологических наблюдений для Московской области [1, с. 120] иллюстрируют невыполнение в реальных измерениях исходных предпосылок гипотезы нормальности. Даже если температура, влажность и атмосферное давление не являются измеряемыми физическими величинами, как влияющие факторы они присутствуют в любом измерении.

В работе [11] на основании выполненных расчетов доказано, что функция плотности распределения вероятностей погрешности результатов измерений, выполненных сложными измерительными каналами измерительных систем, является асимметричной и далекой от нормального распределения.

Приближение реального распределения с помощью кривых из семейства Пирсона или его подсемейств – чисто формальная операция. Именно из таких соображений критиковал параметрическую статистику и получаемые на ее основе параметрические оценки академик С. Н. Бернштейн еще в 1927 г. в своем докладе на Всероссийском съезде математиков [12].

Кроме того, процедура, предлагаемая GUM для получения интервала, содержащего значение измеряемой физической величины с заданной вероятностью, оказалась недостаточно раскрытой и, как следствие, недостаточна универсальной. GUM использует стандартную неопределенность как главный параметр для количественного выражения неопределенности измерения, но в большинстве практических приложений требуется дополнительная мера – интервал охвата для заданной вероятности  $p$ . Но чтобы получить достоверный интервал охвата, необходимо иметь сведения о законе распределения вероятностей измеряемой величины. Однако в соответствии с GUM-подходом плотность распределения вероятностей выходной величины в явном виде не определяют, так как задача нахождения плотности распределения вероятностей является достаточно сложной с математической точки зрения, требующей нахождения свертки распределений. Построение интервала охвата осуществляется с помощью дополнительной меры неопределенности, называемой «расширенной неопределенностью», которая рассчитывается умножением стандартной неопределенности  $u(y)$  на коэффициент охвата  $k$ . Некоторые ученые ставят под сомнение обоснованность использования формулы Уэлча – Саттертуэйта при построении интервалов охвата [10].

Принятый в качестве доминирующего частотный подход для интерпретации распределений вероятностей не исправляет недостатки GUM. Возрождение Байесовского подхода, когда обновляется состояние знаний при появлении новых знаний: производится объединение априорных распределений вероятностей и новых данных, чтобы получить апостериорное распределение вероятностей, также основывается на необходимости приписывать всем входным величинам плотности распределения вероятностей. Эти плотности вероятностей называются «*state-of-knowledge PDF*» [13]. Другими словами, знания об измеряемой физической величине представляются с помощью случайной величины, которой на основании имеющихся о ней знаний можно приписать плотность вероятностей, а отклонения величины будут являться точными моментами соответствующего порядка этой плотности вероятностей. В этом случае стандартная неопределенность, возникающая из способа оценивания по типу А, больше не является оценкой стандартного отклонения, а представляет собой параметр функции плотности

распределения вероятностей, установленной на основании доступного знания, как и неопределенность, оцененная по типу В, – классификация способов оценивания неопределенности на типы А и В оказалась больше не нужной в новом, находящемся в процессе обсуждения научной общественностью, «Руководстве по выражению неопределенности измерения» [14, 15]. Отмеченные выше критические замечания в отношении GUM-подхода, основанные на точечных переменных и гипотезе нормальности, обосновывают необходимость и актуальность его дальнейшего развития переходом на интервальные переменные и заменой вырожденных, точечных решений на решения, получаемые интервальным планированием.

### Библиографический список

1. *Ординарцева, Н. П.* Планирование эксперимента: модели, анализ, неопределенность измерений : монография / Н. П. Ординарцева. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – 242 с.
2. *Пиотровский, Я.* Теория измерений для инженеров / Я. Пиотровский : пер. с польск. – М. : Мир, 1989. – 335 с.
3. *Лячев, В. В.* Основы фундаментальной метрологии : учеб. пособие / В. В. Лячев, Т. Н. Сирая, Л. И. Довбета ; под ред. В. В. Лячева. – СПб. : Элмор, 2007. – 424 с.
4. *Шокин, Ю. И.* Интервальный анализ / Ю. И. Шокин. – Новосибирск : Наука, 1981. – 112 с.
5. *Ординарцева, Н. П.* Планирование эксперимента в измерениях / Н. П. Ординарцева // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2013. – Т. 78, № 3. – С. 72–76.
6. *Ординарцева, Н. П.* Градуировочные эксперименты при помощи метода гибридного регрессионного анализа / Н. П. Ординарцева // Измерительная техника. – 2013. – № 4. – С. 14–16.
7. *Ordinartseva, N. P.* Calibration experiments with hybrid regression analysis / N. P. Ordinartseva // Measurement Techniques. – N. Y. : Springer, 2013. – Vol. 56, iss. 4. – P. 372.
8. *Ординарцева, Н. П.* Метод гибридного моделирования в регрессионном анализе / Н. П. Ординарцева // Вопросы радиоэлектроники. – 2012. – № 1. – С. 136–143.
9. JCGM 100:2008 Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM 1995 with minor corrections.
10. *Ефремова, Н. Ю.* Недостатки и причины пересмотра «Руководства по выражению неопределенности измерения» / Н. Ю. Ефремова // Неопределенность измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты (UM-2016) : сб. докл. XIII Междунар. науч.-техн. семинара. – Минск : БелГИМ, 2016. – С. 57–61.
11. *Данилов, А. А.* Об асимметрии функции плотности распределения вероятностей погрешности результатов измерений, полученных с помощью сложных измерительных каналов измерительных систем / А. А. Данилов, С. А. Шумарова // Измерительная техника. – 2012. – № 11.
12. *Бернштейн, С. Н.* Труды Всероссийского съезда математиков в Москве, 27 апреля – 4 мая 1927 г. – М. ; Л. : ГИЗ, 1928. – С. 50–63.
13. JCGM 102:2011 Supplement 2 to the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement» – Extension to any number of output quantities.
14. JCGM 100:201X (CD) Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty Measurement.
15. JCGM 110:201X (CD) Evaluation of measurement data – Examples of uncertainty evaluation.

#### **Ординарцева Наталья Павловна**

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра информационно-измерительной техники  
и метрологии,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: np\_ordinartseva@mail.ru

#### **Ordinartseva Natalia Pavlovna**

candidate of technical sciences, associate professor,  
sub-department of information  
and measuring equipment and metrology,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 006.91

#### **Ординарцева Н. П.**

**Планирование эксперимента на интервальных переменных как метрологически обоснованный инструмент решения задач измерений** / Н. П. Ординарцева // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2018. – № 3 (25). – С. 43–48. – DOI 10.21685/2307-5538-2018-3-6.